

# OMM - Bakingemova Pi teorema

March 24, 2023

## Prošli čas:

- Veličine koje učestvuju u nekom fizičkom zakonu organizujemo u bezdimenzione grupe.
- Jednačine ostaju potpuno iste prilikom promena jedinica kojima se mere te veličine.
- Možemo da otkrijemo oblik zavisnosti fizičkih veličina tj. oblik fizički korektne jednačine (do na konstantu)

## Danas:

- Da li procedura može da se uradi u opštem slučaju (uvek)?
- Da li može da se automatizuje procedura?

## Bakingemova $\Pi$ teorema

*Neka su  $Q_1, \dots, Q_n$  fizičke veličine,  $\mathcal{M}$  dimenziona matrica ovih veličina u odnosu na osnovne dimenzije  $\delta_1, \dots, \delta_k$ ,  $k \geq 1$  i  $p = \text{rang}(\mathcal{M})$ . Tada je svaka fizički smisljena jednačina*

$$f(Q_1, \dots, Q_n) = 0$$

*ekvivalentna jednačini*

$$F(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-p}) = 0$$

*za neku funkciju  $F$  gde su  $\Pi_i$  bezdimenzione veličine koje se mogu predstaviti kao*

$$\Pi_i = Q_1^{\alpha_{1i}} \cdot \dots \cdot Q_n^{\alpha_{ni}}, \quad i = 1, \dots, n - p$$

*za neke brojeve  $\alpha_{ji} \in \mathbb{Q}$ .*

*Vektori  $\alpha_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})^T$ ,  $i = 1, \dots, n - p$  čine bazu prostora rešenja jednačine  $\mathcal{M}\alpha = 0$ .*

Bez dokaza.

# Primer matematičkog klatna

*Zavisnost perioda oscilovanja matematičkog klatna od ostalih parametara?*

Sa trećeg časa (nakon puno fizike i računa i diferencijalnih

jednačina):  $T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} d\theta$  ili  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , za  $\theta_0 \ll 1$

Fizičke veličine:

- $T$  - period oscilovanja klatna
- $m$  - masa klatna (kuglice)
- $l$  - dužina štapa
- $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$  - ubrzanje Zemljine teže
- $\theta_0$  - početni ugao odklona

Dimenzije fizičkih veličina:

- $\delta(T) = T$
- $\delta(m) = M$
- $\delta(l) = L$
- $\delta(g) = L/T^2$
- $\delta(\theta_0) = 1$

**Korak 1:** formiramo dimenzionu matricu

$$\delta(T) = T, \delta(m) = M, \delta(l) = L, \delta(g) = L/T^2, \delta(\theta_0) = 1$$

$$\mathcal{M} = \begin{array}{ccccc} & T & m & l & g & \theta_0 & \\ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} -2 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} T \\ M \\ L \end{array} \end{array}$$

**Korak 2:** Odredimo  $p = \text{rang}(\mathcal{M}) = 3$

**Korak 3:** Broj veličina  $(T, m, l, g, \theta_0)$ :  $n = 5 \xrightarrow{\text{Pi teorema}}$

$n - p = 5 - 3 = 2$  bezdimenziona faktora  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$

**Korak 4:** Rešavamo sistem linearnih jednačina  $\mathcal{M}\alpha = 0$  u potrazi za 2 linearno nezavisna rešenja koja će činiti bazu tog prostora rešenja:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot T + 0 \cdot m + 0 \cdot l = 2 \cdot g + 0 \cdot \theta_0 \\ 0 \cdot T + 1 \cdot m + 0 \cdot l = 0 \cdot g + 0 \cdot \theta_0 \\ 0 \cdot T + 0 \cdot m + 1 \cdot l = -1 \cdot g + 0 \cdot \theta_0 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \alpha_1 = (2, 0, -1, 1, 0) \\ \alpha_2 = (0, 0, 0, 0, 1) \end{array}$$

**Korak 5:** Formiramo bezdimenzione faktore tako što stepenujemo odgovarajuće veličine  $(T, m, l, g, \theta_0)$  na odgovarajuće stepene iz rešenja  $\alpha_1 = (2, 0, -1, 1, 0)$ ,  $\alpha_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$ :

$$\Pi_1 = T^2 \cdot m^0 \cdot l^{-1} \cdot g^1 \cdot \theta_0^0 = \frac{T^2 g}{l}, \quad \Pi_2 = T^0 \cdot m^0 \cdot l^0 \cdot g^0 \cdot \theta_0^1 = \theta_0$$

**Korak 6:**  $\Pi$  teorema  $\implies$

$$f(T, m, l, g, \theta_0) = 0 \iff F(\Pi_1, \Pi_2) = F\left(\frac{T^2 g}{l}, \theta_0\right) = 0$$

**Korak 7:** Podsećanje (analiza): Teorema o implicitnoj funkciji

Neka je  $A \subset \mathbb{R}^2$  otvoren skup,  $(a, b) \in A$ ,  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija,  $F(a, b) = 0$ , postoji  $\frac{\partial F}{\partial y}$  i neprekidan je na  $A$  i  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ .

Tada postoji okolina  $W = U \times V$  tačke  $(a, b)$  gde je  $U = \{x : |x - a| < \alpha\}$  i  $V = \{y : |y - b| < \beta\}$  i jednoznačno određena neprekidna funkcija  $\phi : U \rightarrow V$  takva da je  $\phi(a) = b$  i  $F(x, \phi(x)) = 0$  za  $x \in U$ .

$$F\left(\frac{T^2 g}{l}, \theta_0\right) = 0 \xrightarrow{\text{TOIF}} \frac{T^2 g}{l} = \phi(\theta_0)$$

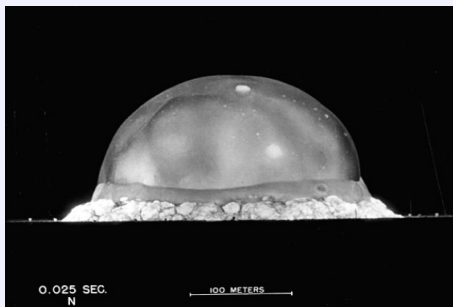
$$\implies T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \phi(\theta_0)$$

**Dodatno:**  $\phi$  je parna funkcija po  $\theta_0$ , razvojem u Tejlorov red:

$$\phi(\theta_0) = A + B\theta_0^2 + \dots \implies T = A\sqrt{\frac{l}{g}} + O(\theta_0^2)$$

Za  $\theta_0 \ll 1$ ,  $O(\theta_0^2) \rightarrow 0$ , pa važi  $T = A\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

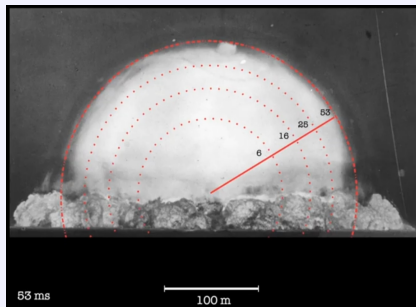
# Primer probe nuklearne bombe



- 16. jula 1945. (New Mexico) - izvedena prva atomska proba Trinity

*Kolika je energija te atomske bombe? Strogo čuvana tajna.*

- G. I. Taylor - "Godine 1950, objavio je dva rada u kojima je procenjivao snagu eksplozije koristeći Bakingemsku Pi teoremu..." (Wikipedia)



Fizičke veličine:

- $E$  - energija bombe
- $R$  - poluprečnik vatrene lopte
- $t$  - proteklo vreme
- $\rho$  - gustina vazduha

Dimenzije fizičkih veličina:

- $\delta(E) = ML^2/T^2$
- $\delta(R) = L$
- $\delta(t) = T$
- $\delta(\rho) = M/L^3$

**Korak 1:** formiramo dimenzionu matricu

$$\delta(E) = ML^2/T^2, \delta(R) = L, \delta(t) = T, \delta(\rho) = M/L^3$$

$$\mathcal{M} = \begin{array}{cccc} & R & t & \rho & E \\ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ -3 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ -2 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} M \\ L \\ T \end{array}$$

**Korak 2:** Odredimo  $p = \text{rang}(\mathcal{M}) = 3$

**Korak 3:** Broj veličina  $(R, t, \rho, E)$ :  $n = 4 \xrightarrow{\Pi \text{ teorema}} n - p = 4 - 3 = 1$

bezdimenzioni faktor  $\Pi_1$ .

**Korak 4:** Rešavamo sistem linearnih jednačina  $\mathcal{M}\alpha = 0$  u potrazi za 1 rešenjem koje će činiti bazu tog prostora rešenja:

$$\alpha = (-5, 2, -1, 1)$$

**Korak 5:** Formiramo bezdimenzijski faktor tako što stepenujemo odgovarajuće veličine ( $R, t, \rho, E$ ) na odgovarajuće stepene iz rešenja  $\alpha = (-5, 2, -1, 1)$ :

$$\Pi_1 = R^{-5} t^2 \rho^{-1} E$$

**Korak 6:**  $\Pi$  teorema  $\implies$

$$f(R, t, \rho, E) = 0 \iff F(\Pi_1) = F(R^{-5} t^2 \rho^{-1} E) = 0$$

**Korak 7:**

$$F(\Pi_1) = 0 \implies \Pi_1 \text{ je koren (nula) jednačine } F(\Pi_1) = 0$$

$$\implies \Pi_1 = C, \quad C = \text{const}$$

$$\implies R^{-5} t^2 \rho^{-1} E = C$$

$$\implies E = C \frac{R^5 \rho}{t^2}$$

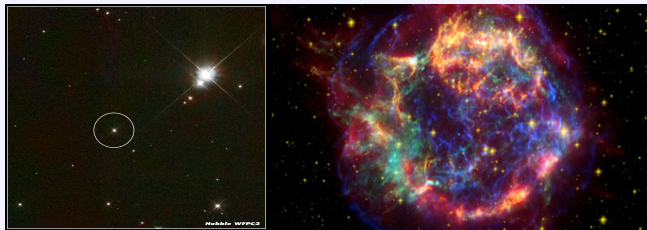
**Dodatno:** Eksperimentalnim putem sa poznatim eksplozivom (TNT)  $\implies C \approx 1 \implies E \approx \frac{R^5 \rho}{t^2} \approx 19$  kilotona TNT.

Date	Name	Yield (kt)	Country
July 16, 1945	<i>Trinity</i>	18–20	United States



# Primer eksplozije supernove

*Kolika energija se oslobodi pri eksploziji supernove?*



- 1572. Tiho Brahe uočio "novu" zvezdu (Tycho's Supernova)- znamo  $t$
- Poluprečnik  $R$  moguće utvrditi na osnovu daljine i ugla pod kojim se vidi (crveni pomak)
- Poznata gustina međuzvezdanog prostora  $\rho$

Isti model  $\implies E \approx 2.4 - 4.8 \times 10^{28}$  megatona TNT (masa Zemlje  $\times 10^{12}$  TNT, energija koje će Sunce osloboditi za  $10^9$  godina)

# Primer kretanje lopte kroz fluid

*Kolika je sila otpora sredine (voda, vazduh,...)?*

Fizičke veličine:

- $F$  - sila otpora
- $R$  - poluprečnik lopte
- $v$  - brzina kojom se kreće telo
- $\rho$  - gustina fluida
- $\mu$  - dinamička viskoznost fluida

Dimenzije fizičkih veličina:

- $\delta(F) = ML/T^2$
- $\delta(R) = L$
- $\delta(v) = L/T$
- $\delta(\rho) = M/L^3$
- $\delta(\mu) = M/LT$

**Korak 1:** formiramo dimenzionu matricu

$$\mathcal{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} R & v & \rho & \mu & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} L \\ M \\ T \end{matrix}$$

**Korak 2:** Odredimo  $p = \text{rang}(\mathcal{M}) = 3$

**Korak 3:** Broj veličina  $(R, v, \rho, \mu, F)$ :  $n = 5 \xrightarrow{\Pi \text{ teorema}} n - p = 5 - 3 = 2$

bezdimenziona faktora  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$

**Korak 4:**  $\mathcal{M}\alpha = 0 \implies \alpha_1 = (1, 1, 1, -1, 0), \alpha_2 = (2, 2, 1, 0, -1)$

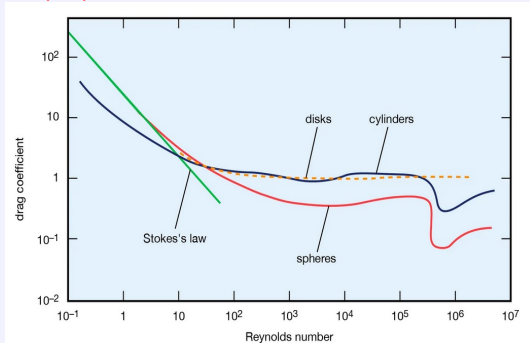
**Korak 5:**  $\Pi_1 = \frac{Rv\rho}{\mu}, \quad \Pi_2 = \frac{R^2v^2\rho}{F}$

**Korak 6:**  $f(R, v, \rho, \mu, F) = 0 \iff f_1(\Pi_1, \Pi_2) = f_1\left(\frac{Rv\rho}{\mu}, \frac{R^2v^2\rho}{F}\right) = 0$

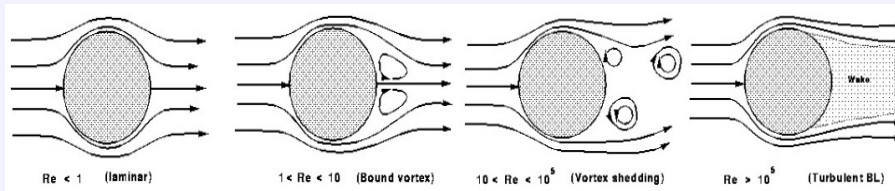
**Korak 7:** Na osnovu TOIF:  $\frac{R^2v^2\rho}{F} = \phi\left(\frac{Rv\rho}{\mu}\right) \implies F = R^2v^2\rho \cdot \phi_1\left(\frac{Rv\rho}{\mu}\right)$

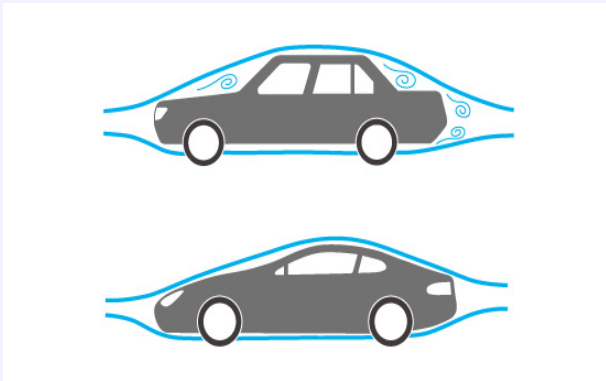
**Dodatno:**

- Reynoldsov broj  $Re = \frac{Rv\rho}{\mu} \implies F = R^2v^2\rho \cdot \phi_1(Re)$
- Koeficijent otpora tela (drag coefficient)  
 $C_D(Re) = \frac{2}{\pi}\phi_1(Re) \implies F = R^2v^2\rho\frac{\pi}{2}C_D(Re)$
- Čeoni presek lopte  $A = R^2\pi \implies F = \frac{1}{2}C_D(Re)Av^2\rho$
- $C_D(Re) = ?$

$C_D(R_e) = ?$ 


- Za  $R_e < 10 \rightarrow$   
linearno  $C_D = 24/R_e$
- Za  
 $10^2 < R_e < 10^5 \rightarrow$   
 $C_D \approx$  konstanta
- Za  $R_e > 10^5$  dodatni  
efekti (ne radimo)





# Skaliranje i umanjeni modeli (makete)

(♡)  $f(\Pi_1, \dots, \Pi_k) = 0$ ,  $\Pi_1, \dots, \Pi_k$  bezdimenzioni faktori

$\Pi_j = Q_1^{\alpha_{1j}} \cdot \dots \cdot Q_n^{\alpha_{nj}}$ ,  $Q_j$  fizičke veličine



Veliki objekat (pravi)

$\Pi_1^y, \dots, \Pi_k^y$



Mali objekat (maketa)

$\Pi_1^m, \dots, \Pi_k^m$

- $\Pi_j^y = \Pi_j^m$ ,  $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k \xrightarrow{(\heartsuit)} \Pi_i^y = \Pi_i^m$
- Ovo ne znači da se i fizičke veličine u faktorima  $\Pi_j^y$  i  $\Pi_j^m$  poklapaju! One mogu biti različite, samo je njihov umnožak uvek isti.

# Primer kretanja lopte kroz fluid (makete)

$$\Pi_1 = \frac{Rv\rho}{\mu}, \quad \Pi_2 = \frac{R^2v^2\rho}{F}$$

## Velika lopta

- Fizičke veličine:

$$F_V, R_V, v_V, \rho_V, \mu_V$$

- Bezdimenzionni faktori:

$$\Pi_1^V = \frac{R_V v_V \rho_V}{\mu_V}$$

$$\Pi_2^V = \frac{R_V^2 v_V^2 \rho_V}{F_V}$$

## Mala lopta

- Fizičke veličine:

$$F_m, R_m, v_m, \rho_m, \mu_m$$

- Bezdimenzionni faktori:

$$\Pi_1^m = \frac{R_m v_m \rho_m}{\mu_m}$$

$$\Pi_2^m = \frac{R_m^2 v_m^2 \rho_m}{F_m}$$

## Veze između fizičkih veličina:

$$F_V = S_F \cdot F_m, R_V = S_R \cdot R_m, v_V = S_V \cdot v_m, \rho_V = S_\rho \cdot \rho_m, \mu_V = S_\mu \cdot \mu_m$$

$S_F, S_R, S_V, S_\rho, S_\mu \in \mathbb{R}$  - skalirajući faktori

## Veze između bezdimenzionih faktora:

$$\Pi_1^V = \frac{R_V v_V \rho_V}{\mu_V} = \frac{S_R \cdot R_m \cdot S_V \cdot v_m \cdot S_\rho \cdot \rho_m}{S_\mu \cdot \mu_m} = \frac{S_R \cdot S_V \cdot S_\rho}{S_\mu} \cdot \Pi_1^m \implies \frac{S_R \cdot S_V \cdot S_\rho}{S_\mu} = 1$$

$$\Pi_2^V = \frac{R_V^2 v_V^2 \rho_V}{F_V} = \frac{(S_R \cdot R_m)^2 (S_V \cdot v_m)^2 \cdot S_\rho \cdot \rho_m}{S_F \cdot F_m} = \frac{S_R^2 \cdot S_V^2 \cdot S_\rho}{S_F} \cdot \Pi_2^m \implies \frac{S_R^2 \cdot S_V^2 \cdot S_\rho}{S_F} = 1$$

## Konkretan primer: $R_v = 25m, R_m = 0.5m$

- $S_R = 25/0.5 = 50$
- $S_\mu = S_\rho = 1$  (isti fluid)

$$\frac{S_R \cdot S_v \cdot S_\rho}{S_\mu} = \frac{50 \cdot S_v \cdot 1}{1} = 1 \implies S_v = \frac{1}{50}$$

$$\implies v_v = \frac{1}{50} \cdot v_m$$

$$\implies v_m = 50 \cdot v_v$$

$$\frac{S_R^2 \cdot S_v^2 \cdot S_\rho}{S_F} = \frac{50^2 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 \cdot 1}{S_F} = 1 \implies S_F = 1$$

$$\implies F_v = 1 \cdot F_m$$

### Zaključak:

*Ukoliko se kreće 50 puta većom brzinom, lopta poluprečnika 0.5m će imati istu silu otpora za kretanje kroz isti fluid kao i lopta poluprečnika 50m .*

Praksa: da li može da se ostvari 50x veća brzina u vazдушnom tunelu? 🤔 😞



*Model važi za bilo koji fluid  $\implies$  Promenimo fluid (vazduh  $\rightarrow$  voda)!*

Vazduh (velika lopta)

- $\rho_v = 1.225 \text{ kg/m}^3$
- $\mu_v = 1.827 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$

Voda (mala lopta)

- $\rho_m = 10^3 \text{ kg/m}^3$
- $\mu_m = 8.90 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms}$

Skalirajući faktori:

- $\rho_v = S_\rho \cdot \rho_m \implies S_\rho = 1.225 \cdot 10^{-3}$
- $\mu_v = S_\mu \cdot \mu_m \implies S_\mu = 2.05 \cdot 10^{-2}$
- $S_R = 50$

$$\frac{S_R \cdot S_V \cdot S_\rho}{S_\mu} = \frac{50 \cdot S_V \cdot 1.225 \cdot 10^{-3}}{2.05 \cdot 10^{-2}} = 1 \implies S_V = 0.335$$

$$\implies v_V = 0.335 \cdot v_m$$

$$\implies v_m = 2.98 \cdot v_V$$

$$\frac{S_R^2 \cdot S_V^2 \cdot S_\rho}{S_F} = \frac{50^2 \cdot 2.98^2 \cdot 1.225 \cdot 10^{-3}}{S_F} = 1 \implies S_F = 0.334$$

$$\implies F_V = 0.334 \cdot F_m$$

### Zaključak:

*Ukoliko se kreće ~ 3 puta većom brzinom lopta poluprečnika 0.5m će imati približno 3 puta veću silu otpora za kretanje kroz vodu nego lopta poluprečnika 50m kroz vazduh .*